

# L'évaluation des garanties requises pour se couvrir contre le risque d'événements extrêmes sur les marchés

Alejandro García et Ramazan Gençay\*

Les systèmes de compensation et de règlement occupent une place primordiale au sein de l'infrastructure des marchés financiers en raison des volumes considérables de fonds et de titres qu'ils traitent. Par exemple, en 2005, des opérations totalisant 49,9 billions de dollars ont été réglées par l'intermédiaire du CDSX, le système canadien de règlement et de compensation des titres. Étant donné les sommes importantes qui transitent par ces systèmes, les autorités de réglementation et les banques ont pris des mesures en vue de les rendre plus sécuritaires.

Un point commun à bon nombre de ces mesures est l'utilisation de garanties pour gérer les risques financiers. Les participants à un système de compensation et de règlement peuvent, par exemple, être tenus de constituer des garanties d'un montant égal à leur position débitrice. Si l'un d'eux se trouve dans l'impossibilité d'honorer sa dette, les avoirs donnés en gage pourront être vendus afin de générer les liquidités dont il a besoin. Mais les garanties peuvent elles-mêmes être composées d'actifs risqués dont la valeur peut fluctuer dans le temps. Il est donc nécessaire d'exiger des garanties suffisantes pour couvrir entièrement les pertes en cas de défaillance.

Pour gérer le risque lié à l'incertitude entourant la valeur future d'une garantie, on retranche une marge fixe de la valeur initiale du titre cédé en gage, ce qui oblige les participants à fournir une garantie d'un montant supérieur à leur position débitrice. Cette marge est connue sous le nom de « décote »<sup>1</sup>. Plus la décote est importante, plus le risque encouru est faible, mais plus les coûts supportés par les utilisateurs du système sont élevés.

Dans le présent article, nous proposons une méthodologie pour comparer diverses méthodes de

calcul de la décote. Nous prêtons une attention particulière au choix d'une méthode qui permette de parer aux événements peu probables (tels que des baisses importantes et inattendues des prix des actifs) susceptibles de nuire à la stabilité du système financier et qui tiennent compte également du coût des garanties.

## Méthodes d'estimation de la décote

Deux éléments sont nécessaires pour calculer la décote d'une garantie. Le premier est un modèle de la distribution des pertes (c'est-à-dire de la courbe de fréquence des moins-values de l'actif donné en garantie), car la loi de probabilité des rendements est inconnue. Le second est une mesure du risque, qui peut être vue comme une façon de rattacher la distribution des pertes à un nombre unique (la décote).

Il existe plusieurs façons de modéliser la distribution des pertes à partir des rendements passés. Signalons entre autres :

- les **approches paramétriques**, où les paramètres nécessaires pour caractériser la loi de probabilité sont calculés à partir des données historiques (est-on en présence d'une loi normale, d'une loi de Student, etc.?). Ces paramètres servent ensuite à établir la distribution approximative des rendements. La décote est donnée par le quantile que cette distribution associe à un seuil de confiance donné<sup>2</sup>;
- les **approches non paramétriques**, comme les techniques de simulation historique, où la forme de la distribution des rendements n'a pas à être modélisée explicitement, mais où

1. La décote représente la diminution possible de la valeur du titre pour un seuil de confiance et une période de détention donnés.

\* Le présent article est une version abrégée de García et Gençay (2006).

2. Les quantiles sont des points équidistants de la fonction de distribution cumulative. Ils sont obtenus en divisant les données ordonnées en  $q$  sous-ensembles de même taille et correspondent aux valeurs marquant les limites entre deux sous-ensembles consécutifs.

les quantiles sont estimés, pour un seuil de confiance donné, d'après la distribution empirique des données.

Outre le recours à l'une de ces approches, l'estimation de la décote exige une quantification du risque. Diverses mesures du risque peuvent être utilisées. L'une des plus courantes est la « valeur exposée au risque » (VaR). Nous avons également employé une autre mesure du risque, la mesure ES (pour *Expected Shortfall*), qui reflète l'espérance de la perte en cas de dépassement de la VaR<sup>3</sup>.

Un exemple aidera à comprendre le mode de calcul de la décote. Supposons qu'un participant à un système de compensation et de règlement de titres ait une position débitrice de 100 \$. Cette position est garantie par un actif ayant une valeur de marché de 100 \$. Pour estimer la décote applicable à cet actif, nous optons pour une approche paramétrique — dans ce cas-ci, pour une distribution normale des rendements — et choisissons une mesure du risque (p. ex., la VaR). Sachant que le taux de variation quotidien du prix de l'actif possède une moyenne de zéro et un écart-type de 3 %, nous estimons la distribution normale correspondante. Ensuite, nous choisissons un seuil de confiance pour la décote (p. ex., 0,5 %)⁴ et une période de détention (p. ex., une journée). Enfin, nous calculons la VaR à partir d'une loi normale ayant la moyenne et l'écart-type des données et attribuons cette valeur à la décote<sup>5</sup>. Combinée à l'emploi de la VaR, cette approche paramétrique donne une décote de 7,72 % (le quantile de la distribution) pour une probabilité extrême de 0,5 % (le seuil de confiance). Compte tenu de cette décote et des caractéristiques de l'actif donné en gage, le montant de la garantie exigée pour couvrir la position de 100 \$ serait de 108,36 \$ (soit  $100/[1 - \text{décote}]$ ).

## Caractérisation de la distribution des rendements à l'aide de la théorie des valeurs extrêmes

Un certain nombre de propriétés empiriques sont communes à une vaste gamme de séries chro-

nologiques financières<sup>6</sup>. Par exemple, les distributions des rendements présentent souvent des queues épaisses. Autrement dit, elles comportent moins d'observations près de la moyenne et davantage dans leurs extrémités qu'une loi normale. Cette remarque se vérifie pour un grand nombre d'actions et certains instruments à revenu fixe qui peuvent servir de garantie. Dans le cas de ces actifs, il n'est pas approprié d'estimer la distribution des rendements au moyen d'une loi normale, car celle-ci ne peut rendre compte adéquatement des valeurs situées dans les queues gauche ou droite de la distribution. Les méthodes fondées sur la théorie des valeurs extrêmes conviennent mieux à la modélisation des queues de la distribution des rendements de titres<sup>7</sup>.

La théorie des valeurs extrêmes repose sur le principe intuitif suivant : s'il est vrai que la loi normale est la distribution limite par excellence des moyennes empiriques (selon le théorème central limite), la famille des lois des valeurs extrêmes sert généralement de distribution limite dans le cas des observations extrêmes de l'échantillon. Ainsi, cette famille de lois de probabilité est plus appropriée lorsqu'on s'intéresse aux extrémités de la distribution, et elle peut être représentée par un seul paramétrage, désigné sous le nom de « loi généralisée des valeurs extrêmes »<sup>8</sup>.

La capacité des méthodes fondées sur la théorie des valeurs extrêmes à rendre compte correctement des événements de très faible probabilité est illustrée dans l'étude de Gençay et Selçuk (2006), qui se penchent sur la crise qui a secoué la Turquie au tournant de l'année 2001. On se souviendra qu'à cette occasion, le taux d'intérêt à un jour dans ce pays a atteint 873 % le 1<sup>er</sup> décembre 2000, puis grimpé jusqu'à 4 000 % le 21 février 2001. Les résultats issus de l'estimation de données antérieures à la crise indiquent que l'on pouvait s'attendre à ce que le taux d'intérêt (annuel simple) à un jour dépasse 1 000 % un jour tous les quatre ans en moyenne. Autrement dit, les niveaux extraordinaires observés durant la crise tenaient à la nature même de l'économie turque.

3. La mesure ES est une solution de rechange *cohérente* à la valeur exposée au risque en ce sens qu'elle possède toutes les propriétés voulues d'une mesure du risque. Cette définition est tirée d'Artzner et autres (1997 et 1999).

4. Cela signifie que, 1 fois sur 200 en moyenne, la décote ne suffira pas à couvrir la variation quotidienne du prix.

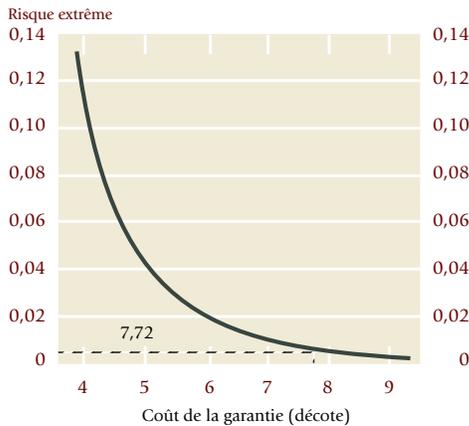
5. La VaR est simplement le quantile de la distribution des pertes qui correspond à la perte maximale possible pour une probabilité élevée donnée.

6. Pour un bon survol des faits stylisés propres aux séries chronologiques financières, voir Mandelbrot (1963).

7. Embrechts, Klüppelberg et Mikosch (1997) présentent une description détaillée de la théorie des valeurs extrêmes et de ses applications dans les domaines de la finance et des assurances.

8. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Fisher-Tippett.

**Graphique 1**  
La frontière risque-coût selon l'hypothèse de normalité



Nota : Décotes et niveaux de risque extrême obtenus à l'aide d'une simulation basée sur une loi normale de moyenne zéro et d'écart-type égal à 3 %

## Frontière risque-coût

Il nous faut maintenant un outil pour comparer les différentes méthodes de calcul de la décote exposées ci-dessus. À cette fin, nous proposons le recours à un nouveau concept, la « frontière risque-coût », permettant d'évaluer la relation d'arbitrage entre le risque et le coût inhérente à chaque méthode. Chacune des méthodes d'estimation de la décote se caractérise en effet par une relation d'arbitrage entre, d'une part, le risque que les fluctuations de la valeur de la garantie excèdent la décote (risque extrême) et, d'autre part, le coût de la garantie, mesuré par l'excédent de la garantie sur la position débitrice, c'est-à-dire la décote. Il y a arbitrage parce qu'une hausse de la décote s'accompagne d'une diminution du risque extrême mais d'un accroissement du coût de la garantie.

La frontière risque-coût peut être construite en établissant la décote pour différents niveaux de risque extrême, mais en conservant la même méthode pour modéliser la distribution des rendements. Une fois que l'on a défini l'éventail des niveaux de risque que l'on veut étudier (tous ceux situés, par exemple, entre 0,5 % et 10 %), on calcule la décote correspondant à chacun de ces niveaux. Il ne reste ensuite qu'à réunir les paires de points qui composeront la frontière risque-coût. Le Graphique 1 illustre la frontière risque-coût obtenue dans le cas de l'exemple donné plus haut (loi normale de moyenne zéro et d'écart-type égal à 3 %, et risque mesuré par la VaR).

## Évaluation des méthodes d'estimation de la décote

La frontière risque-coût permet de comparer entre elles diverses méthodes d'estimation de la décote. Les décotes sont calculées, pour des niveaux identiques de risque extrême, à l'aide de combinaisons différentes i) de modèles de la distribution des pertes et ii) de mesures du risque.

La méthode d'estimation qui sera jugée la plus appropriée est celle dont la frontière se situe le plus près d'une frontière de référence construite à partir des données, mais qui ne la croise pas et qui, par conséquent, ne sous-estime pas les décotes. Prenons l'exemple suivant. Dans une première étape, nous simulons les rendements d'un actif hypothétique à l'aide d'une loi de Student à 2,2 degrés de liberté. Cette loi présente des propriétés statistiques (notamment des queues épaisses) semblables à celles des séries chronologiques financières. Nous estimons ensuite les décotes au moyen de deux méthodes différentes. Comme nous connaissons la loi de probabilité ayant servi

à générer les données, nous pouvons conclure que la meilleure méthode pour calculer la décote est celle dont la frontière risque-coût est la plus rapprochée de celle établie directement à partir des rendements simulés (à l'aide d'une approche non paramétrique).

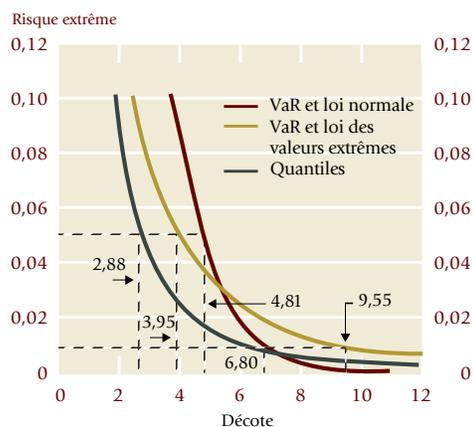
Dans cet exemple, nous comparons deux méthodes : les deux sont basées sur une approche paramétrique, mais l'une repose sur une loi normale, et l'autre sur une loi des valeurs extrêmes. Dans les deux cas, la mesure du risque employée est la VaR. Le Graphique 2 montre les trois frontières risque-coût : le trait vert représente la frontière de référence (quantiles empiriques obtenus au moyen d'une approche non paramétrique); le trait rouge, la frontière tracée à l'aide de la méthode fondée sur une loi normale; et le trait doré, celle établie à partir de la méthode basée sur une loi des valeurs extrêmes.

Au Graphique 2, la comparaison du trait rouge avec la frontière de référence (le trait vert), calculée à partir des rendements simulés, fait ressortir les erreurs de mesure du risque découlant de l'emploi de la méthode fondée sur une loi normale. Ce graphique montre également que l'utilisation d'une loi des valeurs extrêmes donne des décotes plus voisines de celles de la frontière de référence, qui correspondent aux quantiles de la distribution simulée des rendements. À en juger par ces résultats, la méthode qui repose sur une loi des valeurs extrêmes serait plus appropriée.

Dans notre étude, nous avons répété l'analyse à partir des données réelles du marché et obtenu des résultats semblables. Ces résultats peuvent se résumer ainsi :

- Les méthodes fondées sur la VaR et l'hypothèse de normalité surestiment les décotes lorsque le risque extrême est élevé et les sous-estiment lorsqu'il est faible. La raison en est que la frontière risque-coût obtenue sur la base de l'hypothèse de normalité croise la frontière de référence construite à l'aide des quantiles empiriques (trait vert au Graphique 2). Il se peut donc que ces méthodes ne soient pas adéquates pour se prémunir contre le risque extrême.
- Les méthodes basées sur la VaR et la théorie des valeurs extrêmes fournissent une bonne approximation de la pente des quantiles empiriques. Néanmoins, elles produisent des décotes plus élevées que celles correspondant aux quantiles. Ces méthodes sont adéquates pour couvrir le risque extrême. Il ne faut toutefois pas perdre de vue que, bien que des décotes élevées offrent une protection contre les événements de très faible probabilité,

Graphique 2  
Comparaison des méthodes de calcul de la décote



Nota : Les rendements de l'actif donné en garantie sont simulés à partir d'une loi de Student à 2,2 degrés de liberté.

elles sont coûteuses pour les participants au système.

En fin de compte, le choix de la méthode de calcul de la décote est fonction de l'importance relative que l'on accorde aux coûts des garanties et à la couverture des risques extrêmes, laquelle dépend à son tour des objectifs du gestionnaire de risque. Des gestionnaires travaillant au sein d'infrastructures financières essentielles peuvent opter pour une décote correspondant à un quantile plus élevé que ne le feraient des gestionnaires qui évoluent dans des institutions ayant une tolérance plus grande à l'égard du risque. Quelle que soit l'importance relative accordée aux risques et aux coûts, une analyse attentive des propriétés statistiques de la distribution des rendements est toujours de mise au moment de choisir la méthode de calcul de la décote la plus appropriée.

## Conclusions

Nous avons proposé une méthodologie — la frontière risque-coût — qui permet i) de caractériser la relation d'arbitrage risque-coût associée à diverses combinaisons de mesures du risque et de méthodes d'estimation de la décote; et ii) de comparer les mesures du risque obtenues à l'aide de différentes méthodes d'estimation. La méthodologie proposée est utile pour comprendre la relation d'arbitrage risque-coût inhérente à la méthode servant à calculer le montant des garanties que les institutions doivent engager pour couvrir leurs risques. Ces institutions peuvent être des chambres de compensation, des contreparties centrales, des exploitants de systèmes de paiement, des banques centrales ou des banques commerciales qui cherchent à déterminer le risque auquel ils s'exposent.

## Bibliographie

- Artzner, P., F. Delbaen, J.-H. Eber et D. Heath (1997). « Thinking Coherently », *Risk*, vol. 10, n° 11, p. 68-71.
- (1999). « Coherent Measures of Risk », *Mathematical Finance*, vol. 9, n° 3, p. 203-228.
- Embrechts, P., C. Klüppelberg et T. Mikosch (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, New York, Springer.
- García, A., et R. Gençay (2006). « Risk-Cost Frontier and Collateral Valuation in Securities Settlement Systems for Extreme Market Events », document de travail n° 2006-17, Banque du Canada.

Gençay, R., et F. Selçuk (2006). « Overnight Borrowing, Interest Rates and Extreme Value Theory », *European Economic Review*, vol. 50, n° 3, p. 547-563.

Mandelbrot, B. (1963). « New Methods in Statistical Economics », *Journal of Political Economy*, vol. 71, n° 5, p. 421-440.